Universidade Federal Fluminense
Curso: Sistemas de Informação
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professora: Raquel Bravo

Gabarito da Lista de Exercícios sobre Recursão e Relação de Recorrência

1. Encontre a fórmula fechada das seguintes relações de recorrência:

   (a)

$$\begin{cases} a_n & = & 3a_{n-1} \\ a_0 & = & 1 \end{cases}$$

   (b)

$$\begin{cases} a_n & = & -2a_{n-1} \\ a_0 & = & 3 \end{cases}$$

   (c)

$$\begin{cases} a_n & = & a_{n-1} + n - 1 \text{ , para } n \geq 2. \\ a_1 & = & 0 \end{cases}$$

   (d)

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

   (e)

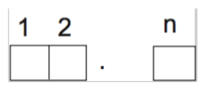
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^{(}n - 1) \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} T(n) = 2T(n-1) \\ T(1) = 2 \end{cases}$$

2. Considere n quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:

   Seja $a_n =$ número de maneiras de colorir os quadrados de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes. Encontre uma relação de recorrência para a_n se cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou azul. Justifique.

   Resposta: Uma fila de tamanho 1 pode conter ou um peça vermelha, ou uma peça azul, portanto $a_1 = 2$. Uma fila de tamanho 2 pode ter qualquer um dos seguintes formatos: (Azul, azul) ou (azul, vermelho) ou (vermelho, azul). Logo, $a_2 = 3$.

   A fila com n peças, para $n \geq 3$, pode ser dividida em dois grupos, a que termina com uma peça azul e a que termina com uma peça vermelha. Se a última (n-ésima) peça da fila é azul, as demais $n-1$ peças da fila podem ter qualquer coloração desde que não existam peças vermelhas consecutivas, este total de colorações é a_{n-1}. Se a última (n-ésima) peça da fila é vermelha, obrigatoriamente, a penúltima peça deve ser azul. Logo, as demais $n-2$ peças da fila podem ter qualquer coloração desde que não existam peças vermelhas consecutivas, este total de colorações é a_{n-2}.

   Pelo princípio aditivo, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$.

   Logo,

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & \text{, para } n \geq 3 \\ a_1 = 2,\ a_2 = 3 \end{cases}$$

3. Suponha que uma moeda seja lançada até que apareçam 2 caras, quando o experimento termina.

(a) Seja a_n o número de experimentos que terminam no n-'ésimo lançamento ou antes. Encontre uma relação de recorrência para a_n. Justifique.

Observe por exemplo, que a_3 é o número de experimentos que terminam no segundo ou terceiro lançamento, ou seja, é a soma de cc, cCc e Ccc onde c significa 'cara' e C 'coroa'.

Resposta: Os experimentos contados em a_n dividem-se em dois conjuntos disjuntos, experimentos onde as duas caras foram obtidas até o $(n-1)$-ésimo lançamento, onde existem a_{n-1} experimentos deste tipo, e experimentos onde a segunda cara foi obtida no n-ésimo lançamento, e nestes experimentos só foi obtida uma cara até o $(n-1)$-ésimo lançamento, logo existem $n-1$ experimentos deste tipo.

Pelo princípio aditivo, temos que $a_n = a_{n-1} + n - 1$.

Observe que $a_1 = 0$. Portanto, a relação de recorrência para a_n é:

$$\begin{cases} a_n &= a_{n-1} + n - 1 \text{ , para } n \geq 2. \\ a_1 &= 0 \end{cases}$$

(b) Calcule a fórmula fechada da relação de recorrência. Justifique.
Resposta: Temos que $a_n = a_{n-1} + n - 1$, logo:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + n - 1 & = \\
&= a_{n-2} + (n-2) + (n-1) & = \\
&= a_{n-2} + 2n - (2+1) & = \\
&= a_{n-3} + (n-3) + 2n - (2+1) & = \\
&= a_{n-3} + 3n - (3+2+1) & = \\
&= a_{n-4} + (n-4) + 3n - (3+2+1) & = \\
&= a_{n-4} + 4n - (4+3+2+1) & = \\
&\vdots & \\
&= a_{n-i} + in - (i + (i-1) + (i-2) + \ldots + 3 + 2 + 1) & = \\
&= a_{n-i} + in - \textstyle\sum_{k=1}^{i} k &
\end{aligned}$$

Tomando $n - i = 1$, temos $\boxed{\text{i=n-1}}$.

Logo, $a_n = a_1 + (n-1)n - \sum_{k=1}^{n-1} k$.

Como $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, então $a_n = a_1 + n(n-1) - \frac{(n-1)n}{2} \Rightarrow a_n = 0 + \frac{2n(n-1)-n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

4. Um certo banco está cobrando 5% de juros ao mês. Tadeu tomou emprestados 1000 reais, e deve pagar prestações mensais fixas de 100 reais (a primeira ao final do primeiro mês de empréstimo).

   (a) Encontre uma relação de recorrência e condições iniciais para a dívida de Tadeu ao final do n-ésimo mês. Justifique.

   Resposta: Seja M_i a quantia que Tadeu deve ao banco no final do i-ésimo mês, para $i \geq 1$. A cada mês o banco cobra $t = 5\%$ de juros e subtrai o valor da prestação paga por Tadeu no valor de $c = 100,00$. Portanto:

$$
\begin{aligned}
M_0 &= 1000 \\
M_1 &= M_0 + 0,05M_0 - 100 \\
&= (1 + 0,05)M_0 - 100 \\
&= 1,05M_0 - 100 \\
M_2 &= M_1 + 0,05M_1 - 100 \\
&= (1 + 0,05)M_1 - 100 \\
&= 1,05M_1 - 100 \\
&\vdots \\
M_i &= M_{i-1} + 0,05M_{i-1} - 100 \\
M_i &= 1,05M_{i-1} - 100
\end{aligned}
$$

   Temos portanto a seguinte relação de recorrência para M_i:
   $M_0 = 1000$
   $M_i = 1,05M_{i-1} - 100$, para $i \geq 1$.

(b) Resolva esta relação. Justifique.

Resposta: Dado $i \geq 1$, temos:

$$\begin{array}{rcll} M_i & = & 1,05M_{i-1} - 100 & = \\ & = & 1,05[1,05M_{i-2} - 100] - 100 & = \\ & = & 1,05^2 M_{i-2} - 1,05 \times 100 - 100 & = \\ & = & 1,05^2 M_{i-2} - 100[1,05 + 1] & = \\ & = & 1,05^2[1,05M_{i-3} - 100] - 100[1,05 + 1] & = \\ & = & 1,05^3 M_{i-3} - 100[1,05^2 + 1,05 + 1] & = \\ & = & 1,05^3[1,05M_{i-4} - 100] - 1,05[1,05^2 + 1,05 + 1] & = \end{array}$$

$$= 1,05^4 M_{i-4} - 100[1,05^3 + 1,05^2 + 1,05 + 1] =$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{rll} = & 1,05^k M_{i-k} - 100[1,05^{k-1} + 1,05^{k-2} + \ldots + 1,05^1 + 1,05^0] & = \\ = & 1,05^k M_{i-k} - 100 \sum_{j=0}^{k-1} 1,05^j & \end{array}$$

Como o valor inicial é $M_0 = 1000$, então para escrever M_i em termos de M_0 devemos tomar $i - k = 0$, isto é, $k = i$. Desta maneira, obtemos a seguinte fórmula fechada para M_i:

$$\begin{array}{rcll} M_i & = & 1,05^k M_0 - 100 \sum_{j=0}^{i-1} 1,05^j & = \\ & = & 1,05^i 1000 - 100 \left(\frac{1,05^0[1,05^i - 1]}{1,05 - 1} \right) & = \\ & = & 1,05^i 1000 - 100 \left(\frac{1,05^i - 1}{1,05 - 1} \right) & \end{array}$$

Pois, $\sum_{j=0}^{i-1} 1,05^j$ é os primeiros i termos de uma progressão geométrica de razão $1,05$. Logo:

$$\begin{array}{rcll} M_i & = & 1,05^i 1000 - 2000 \times [1,05^i - 1] & = \\ & = & 1,05^i 1000 - 2000 \times 1,05^i + 2000 & = \\ & = & 2000 - 1,05^i 1000 & \end{array}$$

5. Considere uma sequência de números inteiros $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ onde $a_1 = 3$ e cada um dos termos seguintes é obtido pela soma do termo anterior multiplicado por 3 e o número 4.

(a) Defina esta sequência recursivamente. Justifique.

Resposta: Observe que cada termo da sequência é obtido pela soma do termo anterior multiplicado por 3 e o número 4. Podemos formar a sequência da seguinte maneira:

$a_1 = 3;$
$a_2 = 3a_1 + 4;$
$a_3 = 3a_2 + 4;$
$a_4 = 3a_3 + 4;$
$\vdots$
$a_n = 3a_{n-1} + 4$

Logo, a sequência é:

$$\begin{cases} a_n &=& 3a_{n-1} + 4 \text{ , para } n \geq 2. \\ a_1 &=& 3 \end{cases}$$

(b) Encontre a fórmula fechada para cada termo da sequência pelo método de substitução. Justifique.

Resposta:

$$\begin{array}{rcl} a_n &=& 3a_{n-1} + 4 \\ &=& 3(3a_{n-2} + 4) + 4 \\ &=& 3^2 a_{n-2} + 3.4 + 4 \\ &=& 3^2(3a_{n-3} + 4) + 3.4 + 4 \\ &=& 3^3 a_{n-3} + 3^2.4 + 3.4 + 4 \\ &=& 3^3 a_{n-3} + 4(3^2 + 3 + 1) \\ &=& 3^3(3a_{n-4} + 4) + 4(3^2 + 3 + 1) \\ &=& 3^4 a_{n-4} + 3^3.4 + 4(3^2 + 3 + 1) \\ &=& 3^4 a_{n-4} + 4(3^3 + 3^2 + 3 + 1) \\ && \vdots \\ &=& 3^i a_{n-i} + 4(3^{i-1} + 3^{i-2} + \ldots + 3^2 + 3^1 + 3^0) \\ &=& 3^i a_{n-i} + 4\sum_{j=0}^{i-1} 3^j \end{array}$$

Logo, para $n - i = 1$, ou seja, $i = n - 1$, temos

$$a_n = 3^{n-1} a_1 + 4\sum_{j=0}^{n-2} 3^j$$

Como $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-2} \overset{\text{PG}}{=} \frac{1(3^{n-2+1}-1)}{3-1} = \frac{3^{n-1}-1}{2}$.
Sendo assim, temos que:

$$a_n = 3^{n-1}a_1 + 4 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{2}$$

como $a_1 = 3$, concluímos:

$$a_n = 3^n + 2(3^{n-1} - 1)$$

6. (a) Seja a_n o número de maneiras de estacionar carros e micro-ônibus em uma garagem com n vagas dispostas em uma única fila. Considere que um carro ocupa uma vaga e um micro-ônibus ocupa duas vagas. (Por exemplo, numa garagem com 3 vagas temos 3 maneiras: carro, carro, carro; carro, micro-ônibus; micro-ônibus, carro, logo $a_3 = 3$.) Encontre uma relação de recorrência para a_n e as condições iniciais. Justifique.

Resposta:

Seja a_n o número de maneiras de estacionar em uma garagem com n vagas. Suponha inicialmente que temos uma garagem com apenas uma vaga. Neste caso, só podemos estacionar um carro, isto é, $a_1 = 1$.

Agora, suponhamos que temos uma garagem com duas vagas. Podemos estacionar dois carros ou um micro-ônibus de modo a ocupar as duas vagas. Assim, temos 2 formas distintas de estacionarmos nesta garagem. Logo, $a_2 = 2$.

Imagine agora que nossa garagem tem $n - 1$ vagas previamente ocupadas. Para ocupar a $n-$ésima, só temos uma forma: estacionando um carro. Se a_{n-1} é o número de formas distintas de estacionar em uma garagem com $n - 1$ vagas, então, como só temos uma maneira de estacionar nesta garagem com $n - 1$ vagas ocupadas, temos que o número de formas de estacionar em tal garagem é representado por a_{n-1}.

Por fim, podemos ter uma garagem com $n-2$ vagas previamente ocupadas. Para preenchermos estas duas vagas, podemos estacionar um micro-ônibus ou 2 carros. Entretanto, quando preenchemos com dois carros, recaímos no caso da garagem com $n-1$ vagas preenchidas, já analisado. Se o levarmos em consideração, estaremos contabilizando uma repetição. Assim, temos apenas uma maneira diferente das que já analisadas de estacionarmos nessa garagem com $n-2$ vagas preenchidas. Logo, se a_{n-2} é o número de formas de estacionar em uma garagem com $n-2$ vagas, temos a_{n-2} maneiras de estacionar na garagem em questão.

Portanto, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Logo, a relação de recorrência que expressa o problema é:

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

(b) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + 3.2^{n-1} \quad , \quad \text{sendo } a_0 = 2$$

Resposta:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3.2^{n-1} \\ &= a_{n-2} + 3.2^{n-2} + 3.2^{n-1} \\ &= a_{n-3} + 3.2^{n-3} + 3.2^{n-2} + 3.2^{n-1} \\ &\vdots \\ &= a_{n-i} + 3.2^{n-i} + \cdots + 3.2^{n-2} + 3.2^{n-1} \\ &= a_{n-i} + \textstyle\sum_{k=1}^{i} 3.2^{n-k} \end{aligned}$$

Fazendo $i = n$ temos $n - i = 0$ e então,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{n} 3.2^{n-k} \\ &= a_0 + 3\textstyle\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \\ &= a_0 + 3\underbrace{[2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 2^0]}_{\text{Soma PG de razão } 2} \\ &= a_0 + 3[\tfrac{2^0(2^n-1)}{2-1}] \\ &= a_0 + 3[2^n - 1] \\ &= 2 + 3.2^n - 3 \\ &= 3.2^n - 1 \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência em questão é dada por $a_n = 3.2^n - 1$.

7. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando substitução regressiva.

$$a_n = 2a_{n-1} + n2^n \text{ para } n \geq 2 \text{ sendo } a_1 = 2.$$

Justifique.

Resposta: Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + n2^n \\
&= 2\underbrace{\left(2a_{n-2} + (n-1)2^{n-1}\right)}_{a_{n-1}} + n2^n \\
&= 2^2a_{n-2} + (n-1)2^n + n2^n \\
&= 2^2\underbrace{\left(2a_{n-3} + (n-2)2^{n-2}\right)}_{a_{n-2}} + (n-1)2^n + n2^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^3a_{n-3} + (n-2)2^n + (n-1)2^n + n2^n \\
&\vdots \\
&= 2^ia_{n-i} + (n-(i-1))2^n + (n-(i-2))2^n + \cdots + n2^n \\
&= 2^ia_{n-i} + 2^n[(n-i+1) + (n-i+2) + \cdots + n]
\end{aligned}$$

Fazendo $n - i = 1$ temos que $i = n - 1$ e sabendo que $a_1 = 2$, temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2^{n-1}a_1 + 2^n[(n-n+1+1)+(n-n+1+2)+\cdots+n] \\
&= 2^{n-1}2 + 2^n[2+3+\cdots+n] \\
&= 2^n \underbrace{[1+2+3+\cdots+n]}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos de uma P.A.}} \\
&= 2^n \tfrac{n(n+1)}{2} \\
&= 2^{n-1}n(n+1)
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = 2^{n-1}n(n+1), n \geq 2, a_1 = 2$.

8. Em um experimento, uma determinada colônia de bactérias tem uma população inicial de 50.000. A população é contada a cada 2 horas, e ao final do intervalo de 2 horas, a população triplica. Seja a_n o número de bactérias presentes no início do n-ésimo período de tempo.

   (a) Deduza a relação de recorrência. Justifique.

   Resposta: No instante inicial temos 50000 bactérias. Logo, $a_0 = 50000$. Como a cada duas horas o número de bactérias é triplicado, no n-ésimo período temos o triplo de bactérias que tínhamos no período $n-1$. Assim, temos a seguinte relação de recorrência:

$$
\begin{cases} a_0 = 50000 \\ a_n = 3a_{n-1} \end{cases}
$$

   (b) Determine a fórmula fechada da relação de recorrência encontrada em (a). Justifique.

   Resposta: Vamos utilizar o método das Substituições Regressivas:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} \\
&= 3(3a_{n-2}) \\
&= 3^2 a_{n-2} \\
&= 3^2(3a_{n-3}) \\
&= 3^3 a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= 3^i a_{n-i}
\end{aligned}
$$

Quando $n = i$ temos $n - i = 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3^n a_0 \\
&= 3^n \times 50000
\end{aligned}
$$

Logo, a fórmula fechada para a relação de recorrência descrita no item (a) é $a_n = 3^n \times 50000$.

(c) No início de que intervalo terão 1.350.000 bactérias presentes? Justifique.

9. Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$a_n = 3a_{n-1} - n3^{n-1}, \quad n \geq 2$, n natural
$a_1 = -1$
Justifique.

Resposta: Utilizando o Método da Substituição Regressiva, temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} - n3^{n-1} \\
&= 3(\underbrace{3a_{n-2} - (n-1)3^{n-2}}_{a_{n-1}}) - n3^{n-1} \\
&= 3^2 a_{n-2} - (n-1)3^{n-1} - n3^{n-1} \\
&= 3^2 a_{n-2} - \left[(n-1) + n\right] 3^{n-1} \\
&= 3^2 \underbrace{(3a_{n-3} - (n-2)3^{n-3})}_{a_{n-2}} - \left[(n-1) + n\right] 3^{n-1} \\
&= 3^3 a_{n-3} - (n-2)3^{n-1} - \left[(n-1) + n\right] 3^{n-1} \\
&= 3^3 a_{n-3} - \left[(n-2) + (n-1) + n\right] 3^{n-1} \\
&\vdots \\
&= 3^i a_{n-i} - \left[(n-i+1) + \cdots + (n-1) + n\right] 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Fazendo $n - i = 1$ e sabendo que $a_1 = -1$, temos que $i = n - 1$ e:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3^{n-1} a_1 - \left[2 + \cdots + (n-1) + n\right] 3^{n-1} \\
&= 3^{n-1}(-1) - [2 + \cdots + (n-1) + n] 3^{n-1} \\
&= -3^{n-1} \underbrace{[1 + 2 + \cdots + n]}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos de uma P.A.}} \\
&= -\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = -\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) 3^{n-1}, n \geq 2, a_1 = -1$.